Title	Radon-Nikodymノ定理ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 217 p.274-p.281
Issue Date	1941-06-13
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74864
rights	
Note	

934. *Radon-Nikodym* ノ定理ニ就テ

吉田 耕作 (阪大)

以下ニ述ベルヤウニ <u>*maximal method*</u> ヲ使ヘバ *Saks* ノ本 *Theory of the integral* ニ於ケル

ヨリモ早ク R−N ノ定理ノ証明ガ得ラレル様デスノミナラズ、コノヤリ方ダトソノマヽ lattice 論的ニ formulate デキテ Riesz, Freudenthal, 角谷等ノ結果ガ割合ニ direct ニ扱ヘル様デス。

§1. Concrete case

Xヲ任意ノ空間, $\mathfrak{X}$ ヲXノ部分集合Eノ作ル countably additive class トスル, 即チ (i) 空集合 $\in \mathfrak{X}$, (ii) $E \in \mathfrak{X}$ ナラEノ餘集合 $CE \in \mathfrak{X}$, (iii) E_n ト共ニ和集合 $\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{X}$。$\mathfrak{X}$ デ定義サレタ實數値ノ finite 函數 $F(E)$ ハ, 互ニ相素ナ集合列 $\{E_n\} \in \mathfrak{X}$ ニ對シテ $F(\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$ ガ成立ツトキ countably additive ト呼ブ。$\mathfrak{X}$ デ c.a. 且ツ non-negative ナ $\varphi(E)$ ヲ一ツトリ之ガXノ上ニ測度ヲ定義スルモノト考ヘル。$\varphi(E)=0$ ナラ $F(E)=0$ ナル如キ c.a. ナFハ絶對連續, $\varphi(E_0)=0$ ナル如キ $E_0 \in \mathfrak{X}$ ガ存在シテ $E \subset CE_0$ ナラ $F(E)$ ナル如キ c.a. ナFハ特異デアルト呼ブ。Xノ上デ定義サレタ實數値函數 $f(x)$ ハ全テノ實數 α ニ對シテ $E_x(f(x)>\alpha) \in \mathfrak{X}$ ナルトキ可測デアルト云フ。$\mathfrak{X}$, φ 及ビ可測函數ガ定義サレタ上ハ Lebesgue 型ノ積分 $\int_X f(x)\varphi(dx)$ —— Radon-Stieltjes積分

ハ例ノ通リ定義サレル譯デス。(コノトキ可測函數 $f(x)$ ハ可積分デアルト云フ)． 不定積分 $F(E)=\int_E f(x)\varphi(dx)$ ガ c. a. 且ツ絶對連續ナコトハ周知デス。

以上念ノタメニ復習シマシタガ

Radon-Nikodym ノ定理 ハ任意ノ c. a. ナ $F(E)$ ハ unique ニ不定積分ト特異函數ノ和トシテ表ハサレルト云フノデアル。

Maximal method ニヨル証明． $F(E)$ ハ non-negative トシテ一般性ヲ失ハナイ。$[F]$ ヲモッテ

$$F(E)\geqq\int_E f(x)\varphi(dx)\ \text{ノ全テノ}\ E\in\mathfrak{X}$$

ガ成リ立ツ様ナ non-negative, 可積分ナ $f(x)$ ノ全体ヲ表ハシマス。

$$\mu=\underset{f\in[E]}{l.u.b.}\int_X f(x)\varphi(dx)$$

ト置クト $f_n(x)\in[F]$ 且ツ $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\varphi(dx)=\mu$ ナル如キ列 $\{f_n\}$ ガ存在スル。然ラバ $\bar{f}_n(x)=\sup_{n\geqq m}f_m(x)\in[F]$ 且ツ $f(x)=\sup_{n\geqq 1}\bar{f}_n(x)\in[F]$, $\int_X f(x)\varphi(dx)=\mu$ ナルコト直チニワカル。吾々ノ証明スベキコトハ $G(E)=F(E)-\int_E f(x)\varphi(dx)$ ノ特異函數ナコトデアル。コレヲ証明スルタメニ

補助定理1． non-negative, c.a. ナ $G(E)$ ガ特異デナイナラ有理數 $\alpha>0$ 及ビ $\varphi(E_\alpha)>0$ ナル $E_\alpha\in\mathfrak{X}$

ガ存在シテ $E \subset E_\alpha$ ナルトキ $G(E) \geqq \alpha\varphi(E)$.

ガ云ヘレバヨイ。何者，E_α ノ特性函數ヲ $\frac{1}{\alpha}C_\alpha(x)$ トスルト $\{f(x)+C_\alpha(x)\} \in [F]$

且ツ $\int_X \{f(x)+C_\alpha(x)\}\varphi(dx) > \mu$ ナル μ ノ定義ニ矛盾スル結果ヲ得ルカラ。

補助定理 1′ ノ証明. Hahn ノ定理 (Saks: loc. cit. 32) ニヨリ任意ノ (有理數) $\alpha > 0$ ニ對シ $E_\alpha \in \mathfrak{X}$ ガ定ッテ

$E \subset E_\alpha$ ノトキ $G(E) \geqq \alpha\varphi(E)$,

$E \subset CE_\alpha$ ノトキ $G(E) \leqq \alpha\varphi(E)$.

ヨッテ全テノ有理數 $\alpha > 0$ ニ對シテ $\varphi(E_\alpha) = 0$ トスルト $E_0 = \bigvee_{\alpha > 0} E_\alpha$ モ亦 $\varphi(E_0) = 0$ 且ツ $E \subset CE_0$ ノトキ $G(E) = 0$ トナッテ G ハ特異函數ニナッテ了フ。

§2. 空間 (A)

$\mathfrak{X}$ デ c.a. ナ $F(E)$ ノ全体 (A) ハ vector lattice ニナル。即チスベテノ $E \in \mathfrak{X}$ ニ於テ $F(E) \geqq 0$ ナルトキ $F \geqq 0$ ($F \geqq 0$ 且ツ $F \neq 0$ ナラ $F > 0$ ト書ク) トスレバ

(1) $F \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$ ナラ $\alpha F \geqq 0$,

(2) $F \geqq 0$, $-F \geqq 0$ ナラ $F = 0$,

(3) $F \geqq 0$, $G \geqq 0$ ナラ $F + G \geqq 0$,

(4) semi-order $\geqq$ ニヨッテ (A) ハ lattice

ヲ作ル。

（實際 $F^+ = F \vee 0 = \sup(F, 0)$, $F^- = F \wedge 0 = \inf(F, 0)$ ハ夫々 $F^+(E) = \sup_{E' \subset E} F(E')$,

$F^-(E) = \inf_{E' \subset E} F(E')$ ニヨリ定義サレル）

良ク知ラレテルヤウニ $F = F^+ + F^-$, $|F| = F^+ - F^- = \sup(F, -F)$. 今 $\|F\| = |F|(X) = F$ ノ X ニ於ケル全変分トヲクト

(5)　　norm $\|F\| = \|(|F|)\|$ ニヨリ (A) ハ Banach 空間ヲ作リ且ツ

$F \geqq 0$, $G \geqq 0$ ナラ $\|F + G\| = \|F\| + \|G\|$

以下 (1) − (5) ヲ満足スル抽象空間 (A) ニ對シテモ上ノ max. method ソノマヽデ Radon-Nikodym ノ定理ガ formulate サレルコトヲ示サウ。任意ニ $\varphi > 0$ ヲ撰ビ (A) ノ unit ト呼ビ 1 デ表ハス。

$\alpha \cdot 1$ ヲ簡單ノタメニ α ト書ク。$E \geqq 0$ ガ $E \wedge (1 - E) = 0$ ヲ満足スルトキ E ヲ quasi-unit, quasi-units E_i ノ一次結合 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$ ヲ階段要素, 階段要素列ノ strong limit ト表ヘサレル如キモノヲ絶對連續要素ト呼ブ。又 $|G| \wedge 1 = 0$ ナル如キ G ヲ特異要素ト云フ。然ラバ

$\boxed{\text{定理 1}}$　任意ノ要素 $\in$ (A) ハ unique ニ絶對連續要素ト特異要素ノ和トシテ表ハサレル。

(注意) 上ノ結果ハ Freudenthal ノ spectral theorem (Proc. Acad. Amsterdam, 39 (1936), 641—651 ヲ使ッテ出シタ角谷君ノ抽象L空間 (Ann. of Math., 42(1941), 523—537) ト本質的ニ同ジコトデアルガ, spectral theorem ヲ使ハズ §1 ト同ジ idea デ出セル所ガ簡単カト思ヒマス。(勿論 Freudenthal ノ idea ハ使ヒマスガ)

補助定理2. (1)—(4) ヲ満足スル vector-lattice ハ distributive

即チ $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,

$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

証明. 例ヘバ G. Birkhoff: Lattice theory, p. 108

補助定理3 階段要素ノ全体 $\mathfrak{T}$ ハ (A) ノ sub-lattice ヲ作ル。

証明 Freudenthal ノ示シタ如ク quasi-unit E ノ全体 $\mathcal{E}$ ハ Boole 代数ヲ作ルコトハ直グワカル. 故ニ任意ノ $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ ハ

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i E_i, \quad E_i \wedge E_j = 0$$

$(i \neq j)$, $E_i \in \mathcal{E}$ ト書ケル。ヨッテ

$$T_1 \vee T_2 = \sum_{i=1}^{n} \max(\alpha_i, \beta_i) E_i,$$

$$T_1 \wedge T_2 = \sum_{i=1}^{n} \min(\alpha_i, \beta_i) E_i.$$

<u>補助定理 4</u>　$0 \leqq \mathbb{F}_1 \leqq \mathbb{F}_2 \leqq \cdots\cdots$ 且ツ $\{\|\mathbb{F}_n\|\}$ ガ有界ナラ $\sup(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \cdots\cdots) = \mathbb{F}$ ガ存在シ且ツ $\lim_{n\to\infty} \|\mathbb{F} - \mathbb{F}_n\| = 0$. 之レカラ特ニ (A) ハ σ-complete (A) ノ上カラ（下カラ）押ヘラレタ系列ハ (A) 内ニ sup (inf) ヲ有スル。

（証明）[1] 良ク知ラレタ不等式 $|\mathbb{F}| - |\mathbb{G}| \leqq |\mathbb{F} - \mathbb{G}|$ カラ (5) ニヨリ

$$\|\mathbb{F}\| - \|\mathbb{G}\| \leqq \|(|\mathbb{F}| - |\mathbb{G}|)\| \leqq \|\mathbb{F} - \mathbb{G}\|$$

ヲ得ルカラ (A) ノ *non-negative* 要素ノ全体ハ <u>*strongly closed*</u>.

次ニ $\|\mathbb{F}_n - \mathbb{F}_m\| = \|\mathbb{F}_n\| - \|\mathbb{F}_m\|$, $n \geqq m$ ガ $m \to \infty$ ノトキ $\to 0$ ダカラ $\mathbb{F}_n$ ハ *strong* ニアル $\mathbb{F}$ ニ收斂スル。ヨッテ $\mathbb{F}_n - \mathbb{F}_m \geqq 0$, $n \geqq m$, ニ於テ $n \to \infty$ ナラシメ $\mathbb{F} \geqq \mathbb{F}_m$ $(m = 1, 2, \cdots\cdots)$. 又モシ $\mathbb{G} \geqq \mathbb{F}_m$ $(m = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナラ $m \to \infty$ ナラシメ $\mathbb{G} \geqq \mathbb{F}$ ヨッテ $\mathbb{F} = \sup(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \cdots\cdots)$.

$\boxed{\text{(A) ノ分解}}$　$\mathbb{F} > 0$ トシテ一般性ヲ失ハズ. $[\mathbb{F}]$ ヲ以テ $T \leqq \mathbb{F}$ ナル如キ階段要素全体ノ集合トスル.

$\mu = \sup_{T \in [\mathbb{F}]} \|T\|$ トヲクト $T_i \in [\mathbb{F}]$, $\lim_{i\to\infty} \|T_i\| = \mu$

---

1) F. Riesz: Acta Szeged, 10 (1940), 1–20 ニヨル.

ナル如キ $\{T_i\}$ ガアル。$F_n = \sup_{m \leqq n} T_m \in [F]$（補助定理3ヲ使ッタ）. 補助定理4ニヨリ $\overline{F} = \sup_{n \geqq 1} F_n = \text{strong} \lim_{n\to\infty} F_n$ 且ツ $\|\overline{F}\| = \mu$. $F - \overline{F} = G \geqq 0$ ガ singular デナイトスルト有理數 $\alpha > 0$ 及ビ quasi-unit $E_\alpha > 0$ ガ存在シテ $G \geqq \alpha E_\alpha$（次ノ補助定理1′.）然ラバ $\overline{F} + \alpha E_\alpha$ ハ $[F]$ ノ急列ノ strong limit, 従ッテ μ ノ定義カラ

$$\|\overline{F} + \alpha E_\alpha\| = \|\overline{F}\| + \alpha \|E_\alpha\| \leqq \mu.$$

之ハ $\|\overline{F}\| = \mu$, $\|E_\alpha\| \neq 0$ ニ反スル。[2)]

<u>補助定理1′</u>. $G \geqq 0$ ガ特異デナイ（$G \wedge 1 \neq 0$）ナラ有理數 $\alpha > 0$ ト $E_\alpha > 0$, $\in \mathfrak{E}$ ガ存在シテ $G \geqq \alpha E_\alpha$

<u>証明</u>. 全テノ $\alpha > 0$ ニ對シ $(G - \alpha)^+ \wedge 1 = 0$ デハナイ。然ラズンバ補助定理2ニヨリ

$$0 \leqq (G-\alpha)^+ \wedge 1 = ((G-\alpha) \wedge 1)^+ = ((G \wedge (1+\alpha) - \alpha)^+$$

$= 0$ 即チ $0 \leqq G \wedge (1+\alpha) \leqq \alpha$ ヲ得テ $G \wedge 1 = 0$ トナルカラ、ヨッテ今 $(G - \alpha)^+ \wedge 1 \neq 0$ 即チ $(G/\alpha - 1)^+ \wedge 1 \neq 0$ $(\alpha > 0)$ トスルト補助定理4デ

$$E_\alpha = \sup_{n \geqq 1} (n (G/\alpha - 1)^+ \wedge 1) \text{ 存在シ且ツ } > 0$$

---

2) 上ノ証明カラ F ノ絶對連續部分 $\overline{F}$ ハ單調増加ナ階段要素列ノ sup デモアリ strong limit デモアル。